Groupe B

ÉPREUVE DE PHYSIQUE

Durée : 6 heures

N. B. — *Les parties* V *et* VI *sont indépendantes l'une de l'autre et indépendantes des parties* I *à* IV.

Les parties I *à* IV, *sans être indépendantes, peuvent dans une certaine mesure être abordées séparément.*

I

On considère une masse m que l'on supposera ponctuelle et située en M, animée par rapport à un référentiel galiléen d'origine O d'une vitesse $\vec{v}$ et soumise à un potentiel gravitationnel newtonien $V(\vec{r})$ où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Montrer que la trajectoire de M est plane. On supposera dorénavant que M se déplace dans le plan xOy.

On posera $|\overrightarrow{OM}| = r$; $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$.

Établir les équations du mouvement de M sous l'action du potentiel $V(\vec{r}) = -\dfrac{G\mathcal{M}}{r}$:

a. En appliquant les théorèmes de conservation de l'énergie et du moment cinétique.

b. En appliquant la relation fondamentale de la dynamique.

On se ramènera à une équation de la forme

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = A,$$

où A est une constante, puis on intégrera les équations du mouvement de M, et on calculera les différents éléments de l'orbite dans le cas où la trajectoire est elliptique en fonction des données suivantes : période T, excentricité e. On trouvera une solution de la forme $r = f_0(\theta)$.

Comment serait modifié le résultat précédent si on ne supposait pas la masse $\mathcal{M}$ rigidement fixée en O. On pourra introduire le barycentre Γ des 2 masses $(m, \mathcal{M})$.

Application numérique :

$T = 88$ jours $\quad e = 0{,}21 \quad \mathcal{M} = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg

$m = 0{,}33 \times 10^{24}$ kg $\quad G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ S.I.

II

La masse $\mathcal{M}$, dont on suppose dans toute la suite le centre d'inertie rigidement lié à O, est en fait un ellipsoïde aplati de révolution autour de l'axe Oz. Son aplatissement

$$\mathcal{A} = \text{rapport } \frac{R_e - R_p}{R_e} = \frac{\text{rayon équatorial — rayon polaire}}{\text{rayon équatorial}}$$

crée un terme quadrupolaire dans le potentiel.

Montrer que le potentiel $V_1(r)$ créé par $\mathcal{M}$ en un point éloigné de O dans le plan xOy a pour expression approchée

$$V_1(r) = -\frac{G\mathcal{M}}{r}\left(1 + \frac{\alpha R_e^2}{r^2}\right)$$

où α est une constante ne dépendant que de $\mathcal{A}$. Pour calculer α, on exprimera le potentiel $V_1(r)$ comme somme des potentiels créés par les différents points de l'ellipsoïde et on effectuera un développement limité à l'ordre 3 en $\dfrac{1}{r}$. On montrera que

$$V_1(r) = -G\left(\frac{\mathcal{M}}{r} - \frac{Q}{4r^3}\right)$$

avec

$$Q = \iiint_{\text{ellipsoïde}} \rho \, d\chi \, d\eta \, d\zeta \, (2\zeta^2 - \chi^2 - \eta^2)$$

où ρ est la masse volumique de l'ellipsoïde et où l'intégrale est étendue à tout le volume de l'ellipsoïde. On donne

$$Q = \frac{2\mathcal{M}}{5}(R_p^2 - R_e^2).$$

Calculer la nouvelle trajectoire du point M, et montrer qu'il y a une avance du périhélie (point le plus proche de O et situé sur le grand axe de la trajectoire « classique ») que l'on calculera en secondes d'arc par siècle. Pour ce faire, on montrera que $\dfrac{\alpha R_e^2}{r^2} << 1$, et que l'on peut remplacer dans l'équation différentielle déterminant la trajectoire de M le terme $\dfrac{\alpha R_e^2}{r^2}$ par $\dfrac{\alpha R_e^2}{f_0^2(\theta)}$.

Application numérique :

$$\mathcal{A} = 5 \times 10^{-5}$$

$$R_e = 6{,}96 \times 10^8 \text{ m}.$$

III

Revenant maintenant au cas I ($\mathcal{A} = 0$), on se place en relativité restreinte. On *supposera* que la loi d'attraction universelle de Newton est valable en relativité restreinte et a même expression qu'en mécanique newtonienne, c'est-à-dire que le terme d'énergie potentielle s'écrit avec la masse de la particule soumise au champ de gravitation : $-\dfrac{m\,\mathfrak{M}\,G}{r}$.

a. Écrire le théorème de conservation du moment cinétique.

b. Écrire le théorème de conservation de l'énergie.

c. On éliminera le temps et la vitesse entre *a* et *b*. En déduire une équation différentielle reliant $\dfrac{1}{r}$ à θ. Comment peut-on retrouver les résultats de I, *a* ?

d. Résoudre l'équation et calculer l'avance du périhélie en secondes d'arc par siècle.

On prendra C_0, célérité de la lumière dans le vide :

$$C_0 = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$$

IV

a. Quelles sont les dimensions de $\dfrac{G\mathfrak{M}}{C_0^2}$? Un photon de fréquence ν_0 est émis à la surface d'un astre de masse $\mathfrak{M}$ et de rayon $\dfrac{2G\mathfrak{M}}{C_0^2}$. Quelle est la fréquence mesurée par un observateur situé à l'infini et recevant ce photon?

Application numérique :

$$\nu_0 = 1\,420 \text{ MHz}$$

$$C_0 = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}.$$

b. En Relativité générale, on peut écrire l'équation de la trajectoire sous la forme :

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} = A + \frac{3G\mathfrak{M}}{C_0^2}\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

où C_0 est la célérité de la lumière dans le vide et A une constante (calculée en I, *b* et III, *c*).

c. On supposera $A >> \dfrac{3G\mathfrak{M}}{C_0^2}\left(\dfrac{1}{r}\right)^2$. Calculer la nouvelle valeur de l'avance du périhélie en secondes d'arc par siècle.

d. Quelles conclusions tirez-vous de l'étude précédente (I, II et III)?

e. Dans quelles conditions pourrait-on avoir une précision sur la position du périgée notable en utilisant des satellites artificiels de la terre et en étudiant leur orbite? L'expérience a été tentée, mais elle n'a pas donné de résultats probants. Quelles en sont à votre avis les raisons?

On rappelle que le terme $\mathcal{A}$ de l'aplatissement de la terre est au moins 60 fois plus grand que celui du soleil.

V

Un observateur situé à la surface de la terre veut mesurer l'aplatissement solaire. Il observe le soleil à travers l'atmosphère que l'on suppose formée de couches planes dont l'indice n ne dépend que de l'altitude (voir fig. 1).

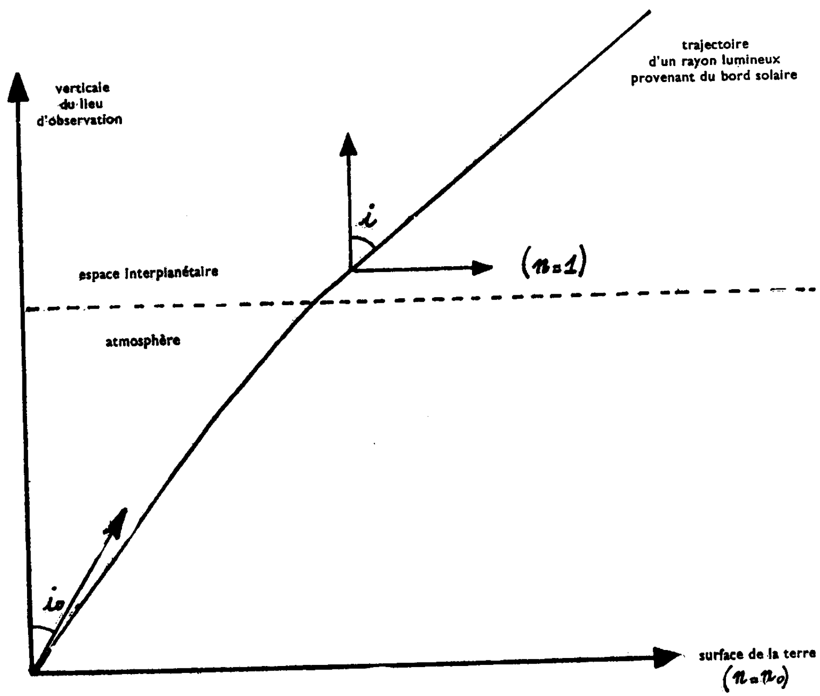

Fig. 1

Trouver la relation existant entre l'angle i_0 sous lequel on voit un point du bord solaire à la surface de la terre ($n = n_0$) et l'angle i sous lequel on le verrait s'il n'y avait pas d'atmosphère ($n = 1$).

On supposera $i - i_0$ petit, et on prendra $n_0 = 1{,}00029$. Montrer que la différence $i - i_0$, exprimée en minutes d'arc, a pour expression $i - i_0 \simeq \operatorname{tg} i_0$.

Application numérique :

$i = 45°$

Diamètre angulaire du soleil : 30′.

Quel est l'aplatissement solaire mesuré? Comment peut-on effectuer les observations pour éliminer l'effet atmosphérique?

VI

On considère maintenant un gaz ionisé, ou plasma, formé d'ions et d'électrons, ayant une charge électrique globale nulle. On négligera les mouvements des ions, beaucoup plus lourds que les électrons.

On supposera que les électrons ne se déplacent que parallèlement à Ox. Au repos, le plasma est homogène et contient n_e électrons par unité de volume. On considère une tranche de plasma d'épaisseur Δx. Les électrons situés en x à l'instant initial sont déplacés d'une quantité $s(x, t)$ à l'instant t.

a. Calculer la densité d'électrons dans la tranche $\Delta x + \Delta s$, puis la densité de charge moyenne en tout point. On justifiera sommairement les approximations faites.

b. En appliquant l'équation de Poisson que l'on intégrera, on montrera que les électrons oscillent avec une pulsation caractéristique du gaz ionisé et de valeur $\omega_p = \sqrt{\dfrac{n_e q^2}{m_e \varepsilon_0}}$. On supposera que ce résultat est applicable à 3 dimensions.

Application numérique :

q = charge de l'électron $= -1{,}6 \times 10^{-19}$ C

m_e = masse de l'électron $= 9 \times 10^{-31}$ kg

$\varepsilon_0 = \dfrac{1}{36\pi \times 10^9}$ S.I.

$n_e = 3 \times 10^4 \text{ m}^{-3}$

c. Dans un gaz ionisé aussi raréfié, la conductivité a pour valeur $\sigma = \dfrac{i\, n_e q^2}{m_e \omega}$ à la pulsation ω, avec $i^2 = -1$. En supposant que la loi d'Ohm reste valable, on appliquera les équations de Maxwell à une onde plane électromagnétique se propageant le long de Oz, dont le champ électrique a la forme $E_x \exp i(kz - \omega t)$. On obtiendra la relation

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)$$

d. Montrer que l'indice du gaz ionisé $\mathcal{N}$ a pour valeur

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

e. Que se passe-t-il pour une onde de pulsation $\omega < \omega_p$?

f. Un pulsar situé à une distance D de O émet des impulsions radioélectriques à intervalles de temps réguliers, de période P (voir fig. 2). Le plasma défini en VI, *b* se trouve uniformément réparti entre O et le pulsar. Quel est le temps d'arrivée en O des composantes de la même impulsion émises par le pulsar aux fréquences ν et $\nu + \delta\nu$?

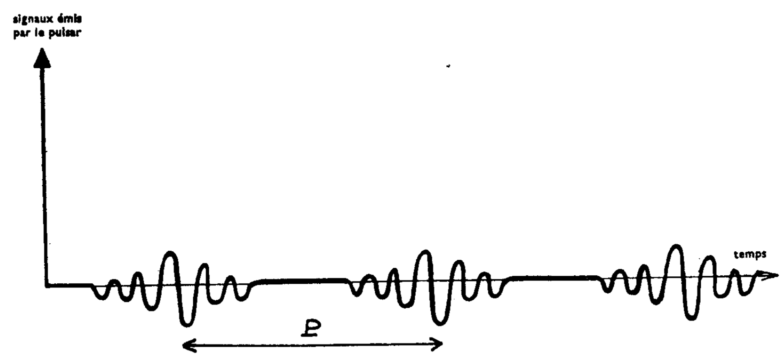

Fig. 2

g. Application numérique :

$$D = 3 \times 10^{17} \text{ m}$$
$$\nu = 400 \text{ MHz}$$
$$\delta\nu = 1 \text{ MHz}$$

Expliquer physiquement pourquoi l'onde de fréquence plus élevée arrive avant l'onde de fréquence plus basse ?

Quelle est la plus petite période P détectable à 400 MHz avec $\delta\nu = 1$ MHz (les impulsions reçues entre 400 et 401 MHz sont enregistrées par le même instrument de mesure) ?

h. Il existe le long de Oz un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$. On s'intéresse maintenant à des ondes polarisées circulairement droite et gauche se propageant le long de Oz. On montrera qu'en effectuant certaines approximations, la vitesse $\vec{v}$ des électrons a pour expression

$$\vec{v} = \frac{iq}{m_e(\omega \pm \omega_{B_0})}\vec{E}$$

où $\vec{E}$ est le champ électrique de l'onde se propageant le long de Oz, et $\omega_{B_0} = \dfrac{qB_0}{m_e}$. Le signe $\pm$ est dû aux 2 polarisations possibles de l'onde.

En déduire que la conductivité σ a pour expression

$$\sigma = \frac{in_e q^2}{m_e(\omega \pm \omega_{B_0})}$$

et que l'indice de réfraction est devenu

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega \pm \omega_{B_0})}$$

En déduire que le temps d'arrivée d'une onde polarisée circulairement droite et d'une onde polarisée circulairement gauche émises simultanément par le pulsar n'est pas le même, mais dépend de $\vec{B}_0$. Y voyez-vous une application ?

i. Application numérique :

$$|\vec{B}_0| = 3 \times 10^{-10} \text{ Tesla.}$$