TROISIÈME PROBLÈME : MÉCANIQUE

Une circonférence (C) de centre O' et de rayon a, située dans un plan vertical, tourne autour d'une de ses tangentes verticales Oz, d'un mouvement de rotation uniforme défini par le vecteur rotation $\vec{\omega}$ (voir schémas 1 et 2).

Un anneau M de masse m, assimilé à un point matériel, est mobile sans frottement sur cette circonférence. On désigne par θ l'angle que fait O'M avec la verticale descendante passant par O'. θ est compté positivement dans le sens indiqué sur les schémas ci-dessous.

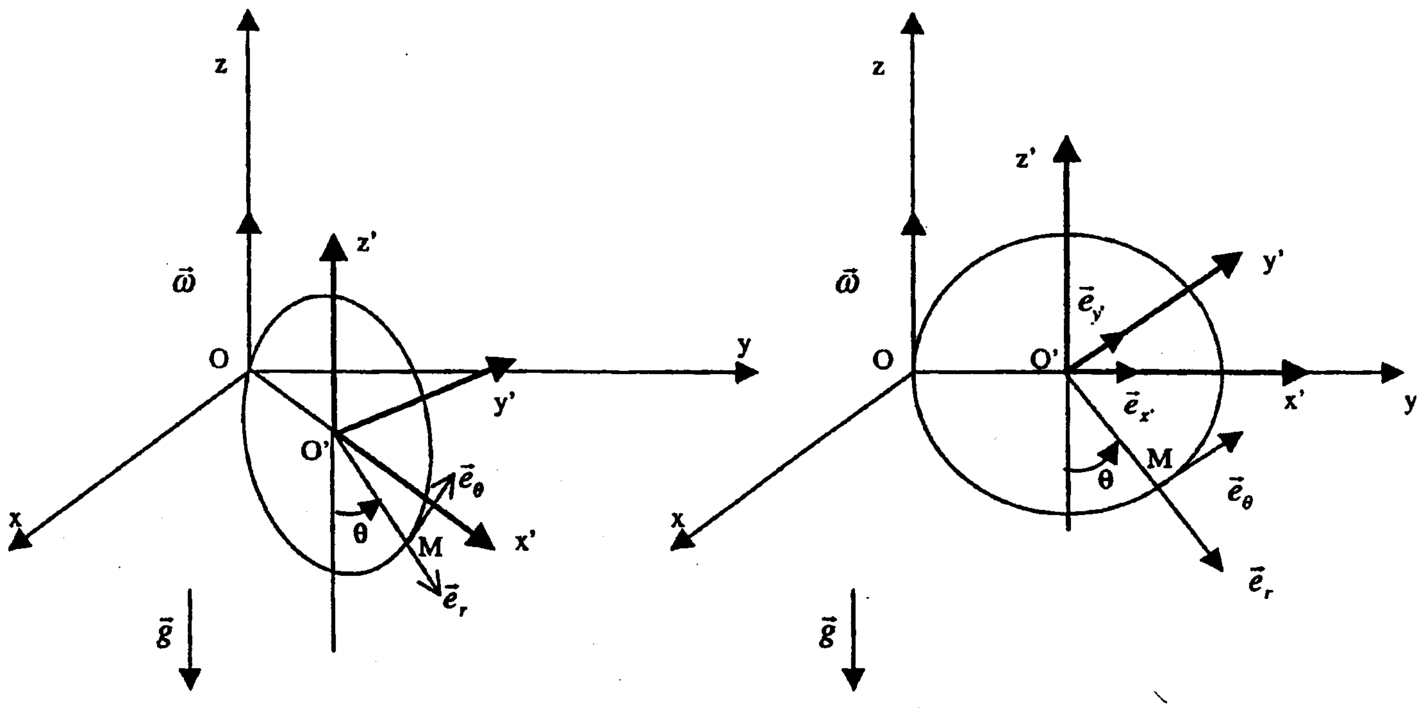

Schéma 1 :
Cas d'une position quelconque de la circonférence (C)

Schéma 2 :
Cas où le plan de la circonférence (C) est confondu avec le plan (yOz)

1ère partie : Etude du mouvement de M sur (C) par plusieurs méthodes

1°) Utilisation de la relation fondamentale de la dynamique

a/ Ecrire la relation fondamentale de la dynamique dans le référentiel R'(Ox'y'z') lié au cercle et en rotation dans le repère galiléen R (Oxyz). On notera $\vec{F}_{ie}$ et $\vec{F}_{ic}$ les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis, et $\vec{R}$ la réaction de (C) sur M.

b/ Montrer que $\vec{F}_{ie}$ est colinéaire à $\vec{e}_{x'}$ et exprimer sa norme en fonction de θ, m, a et ω (norme du vecteur rotation autour de Oz).
Montrer que $\vec{F}_{ic}$ est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$ et exprimer sa norme en fonction de m, θ, ω et v où v est la norme de la vitesse de M dans le référentiel R'.

Tournez la page S.V.P.

c/ Projeter la relation obtenue en a/ sur le vecteur $\vec{e}_\theta$ de la base locale des coordonnées polaires planes dans le plan (x'O'z') et en déduire l'équation différentielle vérifiée par l'angle θ. Montrer que la relation obtenue peut se mettre sous la forme :

$a\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = f(\theta)$ où la fonction $f(\theta)$ est à déterminer (elle sera utilisée au 4°) de la 2ème partie).

2°) Utilisation du moment cinétique

a/ Définir le moment cinétique en O' du point M dans son mouvement dans R'.
Montrer qu'il est colinéaire à $\vec{e}_{y'}$ et exprimer sa composante en fonction de a, m et $\dot{\theta}$.

b/ Démontrer le théorème du moment cinétique utilisé dans un référentiel non galiléen.

c/ L'appliquer pour retrouver l'équation différentielle du mouvement.

3°) Utilisation de l'énergie mécanique

a/ Calculer la fonction énergie potentielle U_1 dont dérive la force d'inertie d'entraînement. Exprimer U_1 en fonction de x', abscisse de M sur l'axe O'x', puis en fonction de θ. Déterminer complètement $U_1(\theta)$ en prenant $U_1(0) = 0$.

b/ Calculer la fonction énergie potentielle U_2 dont dérive le poids de M. Exprimer U_2 en fonction de z', abscisse de M sur l'axe vertical ascendant O'z', puis en fonction de θ. Déterminer complètement $U_2(\theta)$ en prenant $U_2(0) = 0$ (On négligera la variation de la valeur de l'accélération de la pesanteur g avec l'altitude).

c/ Montrer que les énergies potentielles dont dérivent la réaction $\vec{R}$ et la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_{ic}$ sont des constantes, que l'on fixera à 0 dans la suite du problème.

d/ Ecrire, en la justifiant, la conservation de l'énergie et retrouver l'équation différentielle du mouvement.

2ème partie : Etude de l'équilibre relatif de M sur (C)

1°) Montrer que l'équation en θ dont les solutions donnent les positions d'équilibre est :

$$a\,\omega^2(1+\sin\theta) = g\,\mathrm{tg}\,\theta \;.$$

2°) En examinant les directions et les sens des trois forces mises en jeu dans cet équilibre, déterminer quels sont les intervalles possibles pour les valeurs de l'angle θ correspondant aux positions d'équilibre possibles parmi les 4 suivants [0, π/2], [π/2, π], [π, 3π/2], [3π/2, 2π].

3°) Retrouver les résultats du 2°) en utilisant l'équation du 1°). Pour cela, représenter graphiquement l'allure de 2 fonctions de θ choisies de manière à ce que l'intersection de leurs graphes correspondent aux valeurs cherchées (il n'est pas demandé une valeur précise des angles correspondant aux positions d'équilibre mais seulement les intervalles dans lesquels ils se situent).

4°) On désire que l'équilibre stable corresponde à $\theta = \theta_0 = 30$ °.

a/ Quelle doit être la valeur de la vitesse angulaire ω sachant que a = 0,2 m et g = 10 m.s^{-2} (g est la norme de l'accélération de la pesanteur) ?

b/ Un développement limité autour de la valeur θ_0 de la fonction f(θ) déterminée au 1°) c) de la 1ère partie conduit à l'équation : $a\dfrac{d^2\theta}{dt^2} - \left(\dfrac{df}{d\theta}\right)_{\theta=\theta_0}(\theta - \theta_0) = 0$.

Calculer la valeur de $\dfrac{df}{d\theta}$ pour $\theta_0 = 30$ °, en déduire d'après son signe la forme de la solution de cette équation et déterminer si le point M revient ou non à sa position d'équilibre lorsqu'il en est écarté, c'est-à-dire si l'équilibre est stable ou instable.

Fin de l'énoncé